

工学部専門科目「計算と論理」配布資料 練習問題集 (2024 年度版)

五十嵐 淳

京都大学 大学院情報学研究科 通信情報システムコース

cal24@fos.kuis.kyoto-u.ac.jp

<http://www.fos.kuis.kyoto-u.ac.jp/~igarashi/class/cal/>

November 19, 2024

演習の進め方

0. 予め練習問題を解いておく.
1. 演習当日, 白板に解答を書く.
2. 各自, 解答を説明する.
3. 1., 2. を解答者がいなくなるか講義の時間が終了するまで繰り返す.

注意事項

- 小問単位で答えよ.
- 問題を解答する順番は問わない. (後の問題を最初に解いてよい.)
- 問題の解答は早い者勝ちとするが, 同時に解答を開始するのは構わない.
- 説明をして正答した場合は成績へ加える.

1 単純型付ラムダ計算

練習問題 1.1 項 M を以下のように定義する.

$$M = \text{if true then (fun n : nat => plus n n) (S 0) else (fun n : nat => n) 0}$$

とする (plus は変数と考えよ.). M は以下の3つの項

$$M_1 = (\text{fun n : nat => plus n n}) (\text{S } 0)$$
$$M_2 = \text{if true then plus (S 0) (S 0) else (fun n : nat => n) 0}$$
$$M_3 = \text{if true then (fun n : nat => plus n n) (S 0) else 0}$$

に簡約されうる。以下の小問 i (ただし $i = 1, 2, 3$) に答えよ。

小問 i : 簡約関係 $M \rightarrow M_i$ の導出木を書け。

練習問題 1.2 M を `fix f(x : nat) : nat := match x with 0 => 0 | S y => S (S (f y)) end` とする。

$$M (S (S 0)) \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n$$

(ただし M_n は `S (S (...0)...)` の形) となる M_i を列挙せよ。

練習問題 1.3 `Basics.v` に登場した `plus` 関数を `fix` を使った項 M_{plus} で表すと以下のようになる。

$$M_{plus} = \text{fix plus}(m : \text{nat}) : \text{nat} := \text{fun } (n : \text{nat}) => \\ \text{match } m \text{ with } 0 => n \mid S m' => S (\text{plus } m' n) \text{ end}$$

$(M_{plus} (S 0)) (S 0)$ が簡約されて `S (S 0)` になる過程を、 $M_{plus} (S 0) (S 0) \rightarrow M_1 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \rightarrow S (S 0)$ なる M_i を列挙することで示せ。

練習問題 1.4 練習問題 1.3 の M_{plus} を使った項 $M_{plus} 0$ について無限簡約列 ($M_{plus} 0 \rightarrow \dots \rightarrow M_n \rightarrow \dots$) があることを説明せよ。

練習問題 1.5 練習問題 1.1 の項 M の正規形を N とするとき、 $M \rightarrow^* N$ の導出木を書け。

練習問題 1.6 関係 $(\text{fun } x : \text{nat} => x) (S 0) \longleftrightarrow (\text{fun } x : \text{nat} => S 0) 0$ の導出木を書け。

練習問題 1.7 練習問題 1.3 の M_{plus} について、 $M_{plus} (S 0) (S (S 0)) \longleftrightarrow M_{plus} (S (S 0)) (S 0)$ が導出できることを説明せよ。(必ずしも導出木を全て書き下す必要はない。)

練習問題 1.8 項

$$(\text{fun } c : \text{nat} \rightarrow \text{bool} \rightarrow \text{nat} \Rightarrow \text{fun } a : \text{nat} \Rightarrow (c a)) (\text{fun } b : \text{nat} \Rightarrow \text{fun } a : \text{bool} \Rightarrow b)$$

の正規形を求めよ。

練習問題 1.9 以下の小問に答えよ。

- 練習問題 1.1 の項 M について、型付け関係 $\text{plus} : \text{nat} \rightarrow \text{nat} \rightarrow \text{nat} \vdash M : T$ が成立する T を見つけ、型付け関係の導出木を書け。
- (ただし $i = 2, 3, 4$) 練習問題 1.1 の項 M_{i-1} について、型付け関係 $\text{plus} : \text{nat} \rightarrow \text{nat} \rightarrow \text{nat} \vdash M_{i-1} : T_{i-1}$ が成立する T_{i-1} を見つけ、型付け関係の導出木を書け。

練習問題 1.10 練習問題 1.5 の項 N の型付け関係の導出木を書け。

練習問題 1.11 合流性が成立するならば、項に対する正規形が高々ひとつであることを説明せよ。

練習問題 1.12 強正規化性と合流性が成立すると、 $M \longleftrightarrow N$ を判定する問題が決定可能になるのはなぜか説明せよ。

2 単純型付ラムダ計算+ペア

練習問題 2.1 Lists.v で定義した `fst` に相当する項 `fst` を書き,

1. 簡約関係 $fst(0, S\ 0) \longrightarrow^* 0$ の導出木を書け.
2. 型付け関係 $\vdash fst : nat * nat \rightarrow T$ が成立する T を見つけ, 導出を書け.

練習問題 2.2 以下の型付け関係の判断について, 判断が導出できるような項 M を見つけ, 導出を書け. ただし, S, T, U は型とする.

1. $\vdash M : S \rightarrow T \rightarrow S$
2. $\vdash M : (S \rightarrow T \rightarrow U) \rightarrow (S \rightarrow T) \rightarrow S \rightarrow U$
3. $\vdash M : (S \rightarrow T \rightarrow U) \rightarrow (S * T \rightarrow U)$
4. $\vdash M : (S * T \rightarrow U) \rightarrow (S \rightarrow T \rightarrow U)$

3 多相ラムダ計算

練習問題 3.1 項 `id` を

$$id = \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } x : X \Rightarrow x$$

と定義する.

1. 以下の簡約関係が成立する M_i を列挙せよ (ただし M_n は $S(S(\dots 0)\dots)$ の形).

$$id(nat \rightarrow nat)\ S(id\ nat\ 0) \longrightarrow M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n$$

2. 型付け関係の判断について,

$$\vdash id(\forall Y : \text{Type}, Y \rightarrow Y)\ id : T$$

導出できるような型 T を見つけ, 導出を書け.

練習問題 3.2 項 K, S をそれぞれ以下のように定義する.

$$\begin{aligned} K &= \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } Y : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } x : X \Rightarrow \text{fun } y : Y \Rightarrow x \\ S &= \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } Y : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } Z : \text{Type} \Rightarrow \\ &\quad \text{fun } x : X \rightarrow Y \rightarrow Z \Rightarrow \text{fun } y : X \rightarrow Y \Rightarrow \text{fun } z : X \Rightarrow x\ z\ (y\ z) \end{aligned}$$

このとき, 以下の型付け関係の判断について, 判断が導出できるような型 T_1, T_2 を見つけ, 導出を書け.

1. $\vdash K : T_1$
2. $\vdash S : T_2$

練習問題 3.3 以下の型付け関係の判断について、判断が導出できるような型 T および、 T_1, T_2 を見つけ、導出を書け。ただし、練習問題 3.2 で求めた導出と重複する部分は省略して良い。

$$\vdash \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow S \ T_1 \ T_2 \ T_1 \ (K \ T_1 \ T_2) \ (K \ T_1 \ T_1) : T$$

練習問題 3.4 多相ラムダ計算を使うと、ペアを次のように定義することが出来る。

$$\begin{aligned} \text{pair} = \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } Y : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } x : X \Rightarrow \text{fun } y : Y \Rightarrow \\ \text{fun } Z : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } z : X \rightarrow Y \rightarrow Z \Rightarrow z \ x \ y \end{aligned}$$

また、このように定義したペアについての fst と snd は次のように定義される。

$$\begin{aligned} \text{fst} = \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } Y : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } p : \forall Z : \text{Type}, (X \rightarrow Y \rightarrow Z) \rightarrow Z \Rightarrow \\ p \ X \ (\text{fun } x : X \Rightarrow \text{fun } y : Y \Rightarrow x) \\ \text{snd} = \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } Y : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } p : \forall Z : \text{Type}, (X \rightarrow Y \rightarrow Z) \rightarrow Z \Rightarrow \\ p \ Y \ (\text{fun } x : X \Rightarrow \text{fun } y : Y \Rightarrow y) \end{aligned}$$

以下の型付け関係の判断について、判断が導出できるような型 S, T, U を見つけ、導出を書け。

1. $\vdash \text{pair} : S$
2. $\vdash \text{fst} : T$
3. $\vdash \text{snd} : U$

練習問題 3.5 $\text{pair}, \text{fst}, \text{snd}$ を練習問題 3.4 のように定義し、 p を項 $\text{pair } \text{nat } \text{bool } 0 \ \text{true}$ とする。このとき、

$$\text{fst } \text{nat } \text{bool } p \longrightarrow M_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_n$$

となる M_i (ただし M_n は正規形とする) を列挙せよ。また、

$$\text{snd } \text{nat } \text{bool } p \longrightarrow N_1 \longrightarrow \dots \longrightarrow N_m$$

となる N_i (ただし N_m は正規形とする) を列挙せよ。

4 命題論理

練習問題 4.1 命題論理の導出規則を使って以下の判断の導出を書け。命題 $\neg P$ は $P \rightarrow \perp$ の略記である。

1. $\vdash p \rightarrow q \rightarrow p$
2. $\vdash (p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q) \rightarrow p \rightarrow r$
3. $\vdash p \rightarrow \neg \neg p$
4. $\vdash \neg \neg \neg p \rightarrow \neg p$

5. $\vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$
6. $\vdash \neg(p \vee q) \rightarrow (\neg p \wedge \neg q)$
7. $\vdash (\neg p \wedge \neg q) \rightarrow \neg(p \vee q)$
8. $\vdash (p \rightarrow q \rightarrow r) \rightarrow (p \wedge q \rightarrow r)$
9. $\vdash (p \wedge q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow q \rightarrow r)$
10. $\vdash \neg\neg(p \vee \neg p)$
11. $\vdash (p \vee \neg p) \rightarrow \neg\neg p \rightarrow p$
12. $\vdash (p \vee q) \wedge r \rightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$
13. $\vdash (p \wedge q) \vee r \rightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$
14. $\vdash (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \vee q \rightarrow r)$
15. $\vdash \neg(p \wedge \neg p)$
16. $\vdash (\neg p \vee q) \rightarrow (p \rightarrow q)$

5 述語論理

練習問題 5.1 単純型付ラムダ計算 (+命題論理) に関する論理の導出規則を使って以下の判断の導出を書け. ただし P, Q は $\text{nat} \rightarrow \text{Prop}$ 型の変数, R は Prop 型の変数とする. (文脈からも省略する.) 途中, 出てくる $\Gamma \vdash P : \text{Prop}$ の形の判断についての導出は省略してよい. また型宣言 $(: T)$ は適宜省略する.

1. $\vdash (\forall x, P x) \rightarrow (\exists y, P y)$
2. $\vdash (\neg \exists x, P x) \rightarrow \forall y, \neg P y$
3. $\vdash (\forall x, \neg P x) \rightarrow \neg \exists y, P y$
4. $\vdash (\forall x, (P x \rightarrow Q x)) \rightarrow ((\forall y, P y) \rightarrow \forall z, Q z)$
5. $\vdash (\forall x, (P x \rightarrow Q x)) \rightarrow ((\exists y, P y) \rightarrow \exists z, Q z)$
6. $\vdash (\forall x, (P x \wedge Q x)) \rightarrow (\forall y, P y) \wedge (\forall z, Q z)$
7. $\vdash (\forall x, P x \vee \neg P x) \wedge (\neg \neg \forall y, P y) \rightarrow \forall z, P z$
8. $\vdash (\exists x, P x \vee Q x) \rightarrow (\exists y, P y) \vee (\exists x, Q x)$
9. $\vdash (\forall x, P x \rightarrow R) \rightarrow (\exists y, P y) \rightarrow R$
10. $\vdash ((\exists y, P y) \rightarrow R) \rightarrow (\forall x, P x \rightarrow R)$

6 日本語による証明

練習問題 6.1 以下の命題を (日本語で) 証明せよ. (ただし, 命題や関数の意味は Coq での定義によるとする.)

1. $\forall X : \text{Type}, \forall x y : \text{list } X, \text{length}(x ++ y) = \text{length } x + \text{length } y$ を示せ.
2. bool 上の排他的論理和を計算する関数 xorb を定義し, $\forall b c : \text{bool}, \text{xorb } b c = \text{andb } b c \rightarrow b = \text{false} \wedge c = \text{false}$ を示せ.
3. $\forall x y : \text{nat}, \text{ev } x \rightarrow \text{ev } y \rightarrow \text{ev } (x + y)$ を $\text{ev } x$ の導出に関する帰納法で示せ.
4. $\forall x : \text{nat}, \forall y : \text{nat}, (x = y \vee \neg(x = y))$ を x についての帰納法を使って示せ.