工学部専門科目「計算と論理」配布資料
練習問題集 (2020 年度版)

五十嵐 淳
京都大学 大学院情報学研究科 通信情報システム専攻
cal20@fos.kuis.kyoto-u.ac.jp
http://www.fos.kuis.kyoto-u.ac.jp/~igarashi/class/cal/

November 20, 2020

オンライン演習の進め方

0. 予め練習問題を解いておき，PandA を使って pdf で事前に提出しておく．
   - 手書きスキャンでよい．
   - 1 問の解答はページをまたがらないようにすること
   - どの問題の解答か明記すること
   - 問題順に並べておくこと．
1. 演習当日の Zoom に参加
2. 手をあげて指名されたら好きな問題を指定して，その解答の説明を口頭で行う．(解答は事前に提出されたものを画面共有などを使って見せる予定である．)
3. 1., 2. を解答者がいなくなるか講義の時間が終了するまで繰り返す．

注意事項

- 小問単位で答えよ．
- 問題を解答する順番は問わない．(後の問題を最初に解いてよい．)
- 説明をして正答した場合は成績へ加える．

1 単純型付ラムダ計算

練習問題 1.1 項 $\boldsymbol{M}$ を以下のように定義する．

$$\boldsymbol{M} = \texttt{if true then (fun n : nat => plus n n) (S O) else (fun n : nat => n) O}$$

とする (plus は変数と考えよ．)．$\boldsymbol{M}$ は以下の 3 つの項

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M_1} &= \texttt{(fun n : nat => plus n n) (S O)} \\
\boldsymbol{M_2} &= \texttt{if true then plus (S O) (S O) else (fun n : nat => n) O} \\
\boldsymbol{M_3} &= \texttt{if true then (fun n : nat => plus n n) (S O) else O}
\end{aligned}$$

に簡約されうる．以下の小問 i (ただし $i = 1, 2, 3$) に答えよ．

小問 i: 簡約関係 $\boldsymbol{M} \longrightarrow \boldsymbol{M_i}$ の導出木を書け.

練習問題 1.2 $\boldsymbol{M}$ を `fix f(x : nat) : nat := match x with O => O | S y => S (S (f y)) end` とする．

$$\boldsymbol{M}\ \texttt{(S (S O))} \longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n}$$

(ただし $\boldsymbol{M_n}$ は `S (S (...O)...)` の形) となる $\boldsymbol{M_i}$ を列挙せよ.

練習問題 1.3 `Basics.v` に登場した `plus` 関数を `fix` を使った項 $\boldsymbol{M_{plus}}$ で表すと以下のようになる.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{M_{plus}} &= \texttt{fix plus(m : nat) : nat := fun (n : nat) =>} \\
&\qquad \texttt{match m with O => n | S m' => S (plus m' n) end}
\end{aligned}$$

($\boldsymbol{M_{plus}}$ `(S O)`) `(S O)` が簡約されて `S (S O)` になる過程を，$\boldsymbol{M_{plus}}$ `(S O) (S O)` $\longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n} \longrightarrow$ `S (S O)` なる $\boldsymbol{M_i}$ を列挙することで示せ.

練習問題 1.4 練習問題 1.3 の $\boldsymbol{M_{plus}}$ を使った項 $\boldsymbol{M_{plus}}$ `O` について無限簡約列 ($\boldsymbol{M_{plus}}$ `O` $\longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n} \longrightarrow \cdots$) があることを説明せよ.

練習問題 1.5 練習問題 1.1 の項 $\boldsymbol{M}$ の正規形を $\boldsymbol{N}$ とするとき，$\boldsymbol{M} \longrightarrow^* \boldsymbol{N}$ の導出木を書け.

練習問題 1.6 関係 `(fun x : nat => x) (S O)` $\longleftrightarrow$ `(fun x : nat => S O) O` の導出木を書け.

練習問題 1.7 練習問題 1.3 の $\boldsymbol{M_{plus}}$ について，$\boldsymbol{M_{plus}}$ `(S O) (S (S O))` $\longleftrightarrow \boldsymbol{M_{plus}}$ `(S (S O)) (S O)` が導出できることを説明せよ．(必ずしも導出木を全て書き下す必要はない．)

練習問題 1.8 項

```
(fun c : nat -> bool -> nat => fun a : nat => (c a)) (fun b : nat => fun a : bool => b)
```

の正規形を求めよ.

練習問題 1.9 以下の小問に答えよ.

1. 練習問題 1.1 の項 $\boldsymbol{M}$ について，型付け関係 plus : nat -> nat -> nat $\vdash \boldsymbol{M} : \boldsymbol{T}$ が成立する $\boldsymbol{T}$ を見つけ，型付け関係の導出木を書け.

i. (ただし $i = 2,3,4$) 練習問題 1.1 の項 $\boldsymbol{M_{i-1}}$ について，型付け関係 plus : nat -> nat -> nat $\vdash \boldsymbol{M_{i-1}} : \boldsymbol{T_{i-1}}$ が成立する $\boldsymbol{T_{i-1}}$ を見つけ，型付け関係の導出木を書け.

練習問題 1.10 練習問題 1.5 の項 $\boldsymbol{N}$ の型付け関係の導出木を書け.

練習問題 1.11 合流性が成立するならば，項に対する正規形が高々ひとつであることを説明せよ.

練習問題 1.12 強正規化性と合流性が成立すると，$\boldsymbol{M} \longleftrightarrow \boldsymbol{N}$ を判定する問題が決定可能になるのはなぜか説明せよ.

2 単純型付ラムダ計算+ペア

練習問題 2.1 `Lists.v` で定義した `fst` に相当する項 Fst を書き，

1. 簡約関係 Fst (0, S 0) $\longrightarrow^*$ 0 の導出木を書け.
2. 型付け関係 $\vdash \mathit{Fst}$: nat $*$ nat -> $\boldsymbol{T}$ が成立する $\boldsymbol{T}$ を見つけ，導出を書け.

練習問題 2.2 以下の型付け関係の判断について，判断が導出できるような項 $\boldsymbol{M}$ を見つけ，導出を書け．ただし，$\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}$ は型とする.

1. $\vdash \boldsymbol{M}$: $\boldsymbol{S}$ -> $\boldsymbol{T}$ -> $\boldsymbol{S}$
2. $\vdash \boldsymbol{M}$: ($\boldsymbol{S}$ -> $\boldsymbol{T}$ -> $\boldsymbol{U}$) -> ($\boldsymbol{S}$ -> $\boldsymbol{T}$) -> $\boldsymbol{S}$ -> $\boldsymbol{U}$
3. $\vdash \boldsymbol{M}$: ($\boldsymbol{S}$ -> $\boldsymbol{T}$ -> $\boldsymbol{U}$) -> ($\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T}$ -> $\boldsymbol{U}$)
4. $\vdash \boldsymbol{M}$: ($\boldsymbol{S} * \boldsymbol{T}$ -> $\boldsymbol{U}$) -> ($\boldsymbol{S}$ -> $\boldsymbol{T}$ -> $\boldsymbol{U}$)

3 多相ラムダ計算

$\boldsymbol{id}$ を項 `fun X : Type => fun x : X => x` とする.

練習問題 3.1

$$\boldsymbol{id}\ (\mathtt{nat} \mathbin{\texttt{->}} \mathtt{nat})\ \mathtt{S}\ (\boldsymbol{id}\ \mathtt{nat}\ \mathtt{0}) \longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n}$$

(ただし $\boldsymbol{M_n}$ は S (S (...0)...) の形) となる $\boldsymbol{M_i}$ を列挙せよ.

練習問題 3.2 以下の多相ラムダ計算の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{T}$ を見つけ，導出を書け.

1. $\vdash$ `fun X : Type => fun x : X => fun y : X => x` : $\boldsymbol{T}$
2. $\vdash \boldsymbol{id}$ ($\forall$Y : Type, Y -> Y) $\boldsymbol{id} : \boldsymbol{T}$

練習問題 3.3 項 $\boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{S}$ をそれぞれ以下のように定義する．

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{I} &= \texttt{fun X : Type => fun x : X => x} \\
\boldsymbol{K} &= \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun x : X => fun y : Y => x} \\
\boldsymbol{S} &= \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun Z : Type =>} \\
&\qquad \texttt{fun x : X -> Y -> Z => fun y : X -> Y => fun z : X => x z (y z)}
\end{aligned}$$

このとき，以下の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}, \boldsymbol{T_3}$ を見つけ，導出を書け.

1. $\vdash \boldsymbol{I} : \boldsymbol{T_1}$
2. $\vdash \boldsymbol{K} : \boldsymbol{T_2}$
3. $\vdash \boldsymbol{S} : \boldsymbol{T_3}$

練習問題 3.4 以下の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{T}$ および，$\boldsymbol{T_1}, \boldsymbol{T_2}$ を見つけ，導出を書け．ただし，練習問題 3.3 で求めた導出と重複する部分は省略して良い.

$\vdash$ `fun X : Type =>` $\boldsymbol{S}\ \boldsymbol{T_1}\ \boldsymbol{T_2}\ \boldsymbol{T_1}\ (\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{T_1}\ \boldsymbol{T_2})\ (\boldsymbol{K}\ \boldsymbol{T_1}\ \boldsymbol{T_1}) : \boldsymbol{T}$

練習問題 3.5 多相ラムダ計算を使うと，ペアを次のように定義することが出来る.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{pair} &= \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun x : X => fun y : Y =>} \\
&\qquad\qquad \texttt{fun Z : Type => fun Z : X -> Y -> Z => z x y}
\end{aligned}$$

また，このように定義したペアについての $\boldsymbol{fst}$ と $\boldsymbol{snd}$ は次のように定義される.

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{fst} &= \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun p : }\forall\texttt{Z : Type, (X -> Y -> Z) -> Z =>} \\
&\qquad\qquad \texttt{p X (fun x : X => fun y : Y => x)} \\
\boldsymbol{snd} &= \texttt{fun X : Type => fun Y : Type => fun p : }\forall\texttt{Z : Type, (X -> Y -> Z) -> Z =>} \\
&\qquad\qquad \texttt{p Y (fun x : X => fun y : Y => y)}
\end{aligned}$$

以下の型付け関係の判断について，判断が導出できるような型 $\boldsymbol{S}, \boldsymbol{T}, \boldsymbol{U}$ を見つけ，導出を書け.

1. $\vdash \boldsymbol{pair} : \boldsymbol{S}$
2. $\vdash \boldsymbol{fst} : \boldsymbol{T}$
3. $\vdash \boldsymbol{snd} : \boldsymbol{U}$

練習問題 3.6 $\boldsymbol{pair}$, $\boldsymbol{fst}$, $\boldsymbol{snd}$ を練習問題 3.5 のように定義し，$\boldsymbol{p}$ を項 $\boldsymbol{pair}$ `nat bool 0 true` とする．このとき，

$$\boldsymbol{fst}\ \texttt{nat bool}\ \boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{M_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{M_n}$$

となる $\boldsymbol{M_i}$ (ただし $\boldsymbol{M_n}$ は正規形とする) を列挙せよ．また，

$$\boldsymbol{snd}\ \texttt{nat bool}\ \boldsymbol{p} \longrightarrow \boldsymbol{N_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \boldsymbol{N_m}$$

となる $\boldsymbol{N_i}$ (ただし $\boldsymbol{N_m}$ は正規形とする) を列挙せよ.

4 命題論理

練習問題 4.1 命題論理の導出規則を使って以下の判断の導出を書け．命題 $\neg\boldsymbol{P}$ は $\boldsymbol{P}$ -> $\bot$ の略記である．

1. $\vdash \boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{p}$
2. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q})$ -> $\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{r}$
3. $\vdash \boldsymbol{p}$ -> $\neg\neg\boldsymbol{p}$
4. $\vdash \neg\neg\neg\boldsymbol{p}$ -> $\neg\boldsymbol{p}$
5. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q})$ -> $(\neg\boldsymbol{q}$ -> $\neg\boldsymbol{p})$
6. $\vdash \neg(\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q})$ -> $(\neg\boldsymbol{p} \land \neg\boldsymbol{q})$
7. $\vdash (\neg\boldsymbol{p} \land \neg\boldsymbol{q})$ -> $\neg(\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q})$
8. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p} \land \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$
9. $\vdash (\boldsymbol{p} \land \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$
10. $\vdash \neg\neg(\boldsymbol{p} \lor \neg\boldsymbol{p})$
11. $\vdash (\boldsymbol{p} \lor \neg\boldsymbol{p})$ -> $\neg\neg\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{p}$
12. $\vdash (\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q}) \land \boldsymbol{r}$ -> $(\boldsymbol{p} \land \boldsymbol{r}) \lor (\boldsymbol{q} \land \boldsymbol{r})$
13. $\vdash (\boldsymbol{p} \land \boldsymbol{q}) \lor \boldsymbol{r}$ -> $(\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{r}) \land (\boldsymbol{q} \lor \boldsymbol{r})$
14. $\vdash (\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{r}) \land (\boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$ -> $(\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q}$ -> $\boldsymbol{r})$
15. $\vdash \neg(\boldsymbol{p} \land \neg\boldsymbol{p})$
16. $\vdash (\neg\boldsymbol{p} \lor \boldsymbol{q})$ -> $(\boldsymbol{p}$ -> $\boldsymbol{q})$

5 述語論理

練習問題 5.1 単純型付ラムダ計算 (+命題論理) に関する論理の導出規則を使って以下の判断の導出を書け．ただし `P`,`Q` は `nat -> Prop` 型の変数，`R` は `Prop` 型の変数とする．(文脈からも省略する．) 途中，出てくる $\boldsymbol{\Gamma} \vdash \boldsymbol{P}$: `Prop` の形の判断についての導出は省略してよい．また型宣言 (: T) は適宜省略する．

1. $\vdash$ (∀`x`,`P x`) -> (∃`y`,`P y`)
2. $\vdash$ (¬∃`x`,`P x`) -> ∀`y`,¬`P y`
3. $\vdash$ (∀`x`,¬`P x`) -> ¬∃`y`,`P y`

4. $\vdash$ (∀x,(P x -> Q x)) -> ((∀y,P y) -> ∀z,Q z)

5. $\vdash$ (∀x,(P x -> Q x)) -> ((∃y,P y) -> ∃z,Q z)

6. $\vdash$ (∀x,(P x ∧ Q x)) -> (∀y,P y) ∧ (∀z,Q z)

7. $\vdash$ (∀x,P x ∨ ¬P x) ∧ (¬¬∀y,P y) -> ∀z,P z

8. $\vdash$ (∃x,P x ∨ Q x) -> (∃y,P y) ∨ (∃x,Q x)

9. $\vdash$ (∀x,P x -> R) -> (∃y,P y) -> R

10. $\vdash$ ((∃y,P y) -> R) -> (∀x,P x -> R)

6 日本語による証明

練習問題 6.1 以下の命題を (日本語で) 証明せよ．(ただし，命題や関数の意味は Coq での定義によるとする．)

1. ∀X : Type,∀x y : list X,length(x ++ y) = length x + length y を示せ.
2. bool 上の排他的論理和を計算する関数 xorb を定義し，∀b c : bool,xorb b c = andb b c-> b = false ∧ c = false を示せ.
3. ∀x y : nat,ev x -> ev y -> ev (x + y) を ev x の導出に関する帰納法で示せ.
4. ∀x : nat,∀y : nat,(x = y ∨ ¬(x = y)) を x についての帰納法を使って示せ.