

# 工学部専門科目「計算と論理」配布資料

## 多相ラムダ計算 (System F)

五十嵐 淳

京都大学 大学院情報学研究科 通信情報システム専攻

cal22@fos.kuis.kyoto-u.ac.jp

<http://www.fos.kuis.kyoto-u.ac.jp/~igarashi/class/cal/>

November 15, 2022 (Revised on November 15, 2022)

### 1 System F: 多相ラムダ計算

教科書 Poly.v で見たような多相関数 (*polymorphic function*) (型引数を取り, 引数によって型が変化する関数) によって単純型付ラムダ計算を拡張した計算体系が多相ラムダ計算 (*polymorphic  $\lambda$ -calculus*) である. 多相ラムダ計算は System F とも呼ばれている.<sup>1</sup>

System F の (単純型付ラムダ計算に対しての) 本質的な拡張は項 (プログラム) への多相関数 (型抽象 (*type abstraction*)) とも呼ぶ

$$\text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow M$$

と型適用 (*type application*)  $M T$  の導入, そして型への全称型 (*universal type*)  $\forall X : \text{Type}, T$  の導入である.

単純型付ラムダ計算での  $\beta$  簡約においてパラメータに実引数を代入するのと同様に, 型抽象が型に適用された場合, 型抽象の本体の型を表すパラメータに実引数である型を代入するような簡約によって計算が進む.

$$(\text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow M[X]) T \longrightarrow M[T]$$

関数本体中の (型を表す) 仮引数  $X$  が実引数  $T$  で置き換わるところは  $\beta$  簡約と全く同じである. 例えば, 与えられた関数  $f$  を  $x$  に二回適用する多相高階関数

$$M \stackrel{\text{def}}{=} \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } f : X \rightarrow X \Rightarrow \text{fun } x : X \Rightarrow f (f x)$$

について,

$$M \text{ nat} \longrightarrow \text{fun } f : \text{nat} \rightarrow \text{nat} \Rightarrow \text{fun } x : \text{nat} \Rightarrow f (f x)$$
$$M \text{ bool} \longrightarrow \text{fun } f : \text{bool} \rightarrow \text{bool} \Rightarrow \text{fun } x : \text{bool} \Rightarrow f (f x)$$

---

<sup>1</sup>アメリカの計算機科学者ジョン・レイノルズ (John Reynolds, 1935–2013) とフランスの論理学者ジャン・イヴ・ジラル (Jean-Yves Girard, 1947–) が 1970 年代初めに独立に考え出した. System F の名前はジラルによる.

となり、(機能は同じだが) 自然数型 (nat), 真偽値型 (bool) に特化した関数が得られる。  
 型付け関係は単純型付ラムダ計算と同様に

$$\Gamma \vdash M : T$$

という形で表されるが、型環境には変数の型宣言  $x : T$  だけでなく、型変数の宣言  $X : \text{Type}$  も並ぶことになる。(ふつうの) 関数抽象や関数適用のための規則は (型環境の変更を除いて) 変わらない。  
 多相関数についての型付け規則は

$$\frac{\Gamma, X : \text{Type} \vdash M : T \quad X \notin \text{dom}(\Gamma)}{\Gamma \vdash \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow M : \forall X : \text{Type}, T} \quad (\text{T-TFUN})$$

と与えられる。関数全体に与えられる型の違いはあるが、T-FUN 規則とよく似ている。この  $X$  は後で多相関数が型引数に適用された時に具体的な型に置き換えられるものである。実際、型適用の型付け規則は

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall X : \text{Type}, T[X]}{\Gamma \vdash M S : T[S]} \quad (\text{T-TAPP})$$

のようになり、多相関数型  $\forall X : \text{Type}, T[X]$  を持つ多相関数  $M$  型引数  $S$  を与えると、 $X$  を  $S$  に置き換えたような型 (すなわち  $T[S]$ ) が得られる。

例えば、上で定義した二回適用する関数の例は以下のように型付け関係を導出することができる。

$$\begin{aligned} M &\stackrel{\text{def}}{=} \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } f : X \rightarrow X \Rightarrow \text{fun } x : X \Rightarrow f (f x) \\ \Gamma &\stackrel{\text{def}}{=} X : \text{Type}, f : X \rightarrow X, x : X \end{aligned}$$

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash f : X \rightarrow X}{\Gamma \vdash f : X \rightarrow X} \text{T-VAR} \quad \frac{\Gamma \vdash f : X \rightarrow X \quad \Gamma \vdash x : X}{\Gamma \vdash f x : X} \text{T-VAR}}{\Gamma \vdash f (f x) : X} \text{T-APP} \quad \frac{\Gamma \vdash f (f x) : X}{X : \text{Type}, f : X \rightarrow X \vdash \text{fun } x : X \Rightarrow f (f x) : X \rightarrow X} \text{T-FUN}}{X : \text{Type} \vdash \text{fun } f : X \rightarrow X \Rightarrow \text{fun } x : X \Rightarrow f (f x) : (X \rightarrow X) \rightarrow X \rightarrow X} \text{T-FUN} \quad \frac{\Gamma \vdash f (f x) : X \quad \Gamma \vdash x : X}{\Gamma \vdash f (f x) : X} \text{T-APP}}{\Gamma \vdash M : \forall X : \text{Type}, (X \rightarrow X) \rightarrow X \rightarrow X} \text{T-TAPP} \quad \frac{\Gamma \vdash M : \forall X : \text{Type}, (X \rightarrow X) \rightarrow X \rightarrow X}{\Gamma \vdash M \text{ nat} : (\text{nat} \rightarrow \text{nat}) \rightarrow \text{nat} \rightarrow \text{nat}} \text{T-TAPP}$$

以下に (自然数も真偽値も再帰関数も含まない) 純粋な System F の定義をまとめる。

## 1.1 型, ラムダ項, 型環境, 判断の構文

(types)	$S, T$	::=	$X$	
				$S \rightarrow T$
				$\forall X : \text{Type}, T$
(terms)	$M, N$	::=	$x$	
				$\text{fun } x : T \Rightarrow M$
				$M_1 M_2$
				$\text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow M$
				$M T$
(type environments)	$\Gamma$	::=	$\bullet$	
				$\Gamma, x : T$
				$\Gamma, X : \text{Type}$

## 1.2 簡約

$(\text{fun } x : T \Rightarrow M[x]) N \longrightarrow M[N]$	(R-BETA)
$(\text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow M[X]) T \longrightarrow M[T]$	(R-TBETA)
$\frac{M \longrightarrow M'}{\text{fun } x : T \Rightarrow M \longrightarrow \text{fun } x : T \Rightarrow M'}$	(RC-FUN)
$\frac{M \longrightarrow M'}{M N \longrightarrow M' N}$	(RC-APP1)
$\frac{N \longrightarrow N'}{M N \longrightarrow M N'}$	(RC-APP2)
$\frac{M \longrightarrow M'}{\text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow M \longrightarrow \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow M'}$	(RC-TFUN)
$\frac{M \longrightarrow M'}{M T \longrightarrow M' T}$	(RC-TAPP)

## 1.3 型付け規則

$\frac{(x : T \in \Gamma)}{\Gamma \vdash x : T}$	(T-VAR)
--------------------------------------------------	---------

$$\frac{\Gamma, x : S \vdash M : T \quad (x \notin \text{dom}(\Gamma))}{\Gamma \vdash \text{fun } x : S \Rightarrow M : S \rightarrow T} \quad (\text{T-FUN})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : S \rightarrow T \quad \Gamma \vdash N : S}{\Gamma \vdash M N : T} \quad (\text{T-APP})$$

$$\frac{\Gamma, X : \text{Type} \vdash M : T \quad (X \notin \text{dom}(\Gamma))}{\Gamma \vdash \text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow M : \forall X : \text{Type}, T} \quad (\text{T-TFUN})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \forall X : \text{Type}, S[X]}{\Gamma \vdash M T : S[T]} \quad (\text{T-TAPP})$$

代入と変数キャプチャについて再び 単純型付ラムダ計算において、代入時には自由変数のキャプチャを避けなければならない、ということを経たが、System F でも同様な問題が型変数について発生する。System F では、項中の変数への項の代入だけではなく、項や型中の型変数への型の代入がある。そして、 $\text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow M$  や  $\forall X : \text{Type}, T$  という、型パラメータを宣言する項・型があるため、型変数のキャプチャを避ける必要がある。方法は単純型付ラムダ計算と同じで、型変数の名前替えを行うことになる。例えば、

$$Y \rightarrow (\forall X : \text{Type}, X \rightarrow Y)$$

の  $Y$  に  $X \rightarrow \text{nat}$  を代入した場合、得られる結果は、

$$(X \rightarrow \text{nat}) \rightarrow (\forall X : \text{Type}, X \rightarrow X \rightarrow \text{nat})$$

ではなく、 $\forall X : \text{Type}, \dots$  の部分の  $X$  の名前替えをして

$$(X \rightarrow \text{nat}) \rightarrow (\forall Z : \text{Type}, Z \rightarrow X \rightarrow \text{nat})$$

となる。

変数の名前替えをした項同士 (例えば  $\text{fun } x : \text{nat} \Rightarrow x$  と  $\text{fun } y : \text{nat} \Rightarrow y$ ) を同一視したのと同様、多相関数の型変数、さらには、多相関数型の型変数の名前替えも自由に行うのが通例である。例えば、

$$\text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } x : X \Rightarrow x \quad \text{と} \quad \text{fun } Y : \text{Type} \Rightarrow \text{fun } x : Y \Rightarrow x$$

や

$$\forall X : \text{Type}, X \rightarrow X \quad \text{と} \quad \forall Y : \text{Type}, Y \rightarrow Y$$

は同一視する。

#### 1.4 (純粋な) System F の重要な性質

**定理 1 (合流性)**  $\Gamma \vdash M_1 : T$  とする。任意の項  $M_2, M_3$  に対して、 $M_1 \rightarrow^* M_2$  かつ  $M_1 \rightarrow^* M_3$  ならば、ある  $M_4$  が存在し、 $M_2 \rightarrow^* M_4$  かつ  $M_3 \rightarrow^* M_4$  が成り立つ。

**定理 2 (型保存定理)**  $\Gamma \vdash M : T$  かつ、 $M \rightarrow M'$  ならば、 $\Gamma \vdash M' : T$  である。

**定理 3 (強正規化性)**  $\Gamma \vdash M : T$  とする。 $M \rightarrow M_1 \rightarrow M_2 \rightarrow \dots$  なる項の無限列  $M_1, M_2, \dots$  は存在しない。

## 2 System F + 自然数, 真偽値, リスト, 再帰関数

(types)  $S, T ::= \dots$

- | nat
- | bool
- | list  $T$

(terms)  $M, N ::= \dots$

- | 0
- | S
- | match  $M$  with 0 =>  $N_1$  | S  $x$  =>  $N_2$  end
- | true
- | false
- | if  $M$  then  $N_1$  else  $N_2$
- | nil
- | cons
- | match  $M$  with nil =>  $N_1$  | cons  $x y$  =>  $N_2$
- | fix  $x(y : S) : T := M$

$\Gamma ::= \dots$

### 2.1 簡約

match 0 with 0 =>  $N_1$  | S  $x$  =>  $N_2$  end  $\longrightarrow N_1$  (R-MATCHZ)

match S  $M$  with 0 =>  $N_1$  | S  $x$  =>  $N_2[x]$  end  $\longrightarrow N_2[M]$  (R-MATCHS)

if true then  $N_1$  else  $N_2$   $\longrightarrow N_1$  (R-IFT)

if false then  $N_1$  else  $N_2$   $\longrightarrow N_2$  (R-IFF)

match nil  $T$  with nil =>  $N_1$  | cons  $x y$  =>  $N_2[x, y]$   $\longrightarrow N_1$  (R-MATCHN)

match cons  $T M_1 M_2$  with nil =>  $N_1$  | cons  $x y$  =>  $N_2[x, y]$   $\longrightarrow N_2[M_1, M_2]$   
(R-MATCHC)

(fix  $x(y : S) : T := M[x, y]$ )  $N \longrightarrow M[\text{fix } x(y : S) : T := M[x, y], N]$  (R-FIX)

$$\frac{M \longrightarrow M'}{\text{match } M \text{ with } 0 \Rightarrow N_1 \mid S x \Rightarrow N_2 \text{ end} \longrightarrow \text{match } M' \text{ with } 0 \Rightarrow N_1 \mid S x \Rightarrow N_2 \text{ end}}$$
 (RC-MATCH1)

$$\frac{N_1 \longrightarrow N'_1}{\text{match } M \text{ with } 0 \Rightarrow N_1 \mid S x \Rightarrow N_2 \text{ end} \longrightarrow \text{match } M \text{ with } 0 \Rightarrow N'_1 \mid S x \Rightarrow N_2 \text{ end}}$$
 (RC-MATCH2)

$$\frac{N_2 \longrightarrow N'_2}{\text{match } M \text{ with } 0 \Rightarrow N_1 \mid S \ x \Rightarrow N_2 \text{ end} \longrightarrow \text{match } M \text{ with } 0 \Rightarrow N_1 \mid S \ x \Rightarrow N'_2 \text{ end}} \quad (\text{RC-MATCH3})$$

$$\frac{M \longrightarrow M'}{\text{if } M \text{ then } N_1 \text{ else } N_2 \longrightarrow \text{if } M' \text{ then } N_1 \text{ else } N_2} \quad (\text{RC-IF1})$$

$$\frac{N_1 \longrightarrow N'_1}{\text{if } M \text{ then } N_1 \text{ else } N_2 \longrightarrow \text{if } M \text{ then } N'_1 \text{ else } N_2} \quad (\text{RC-IF2})$$

$$\frac{N_2 \longrightarrow N'_2}{\text{if } M \text{ then } N_1 \text{ else } N_2 \longrightarrow \text{if } M \text{ then } N_1 \text{ else } N'_2} \quad (\text{RC-IF3})$$

$$\frac{M \longrightarrow M'}{\text{fun } x : T \Rightarrow M \longrightarrow \text{fun } x : T \Rightarrow M'} \quad (\text{RC-FUN})$$

$$\frac{M \longrightarrow M'}{\text{fix } x(y : S) : T := M \longrightarrow \text{fix } x(y : S) : T := M'} \quad (\text{RC-FIX})$$

## 2.2 型付け規則

$$\frac{}{\Gamma \vdash 0 : \text{nat}} \quad (\text{T-ZERO})$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash S : \text{nat} \rightarrow \text{nat}} \quad (\text{T-SUCC})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{nat} \quad \Gamma \vdash N_1 : T \quad \Gamma, x : \text{nat} \vdash N_2 : T}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with } 0 \Rightarrow N_1 \mid S \ x \Rightarrow N_2 \text{ end} : T} \quad (\text{T-MATCH})$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{true} : \text{bool}} \quad (\text{T-TRUE})$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{false} : \text{bool}} \quad (\text{T-FALSE})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{bool} \quad \Gamma \vdash N_1 : T \quad \Gamma \vdash N_2 : T}{\Gamma \vdash \text{if } M \text{ then } N_1 \text{ else } N_2 : T} \quad (\text{T-IF})$$

$$\frac{\Gamma, x : S \rightarrow T, y : S \vdash M : T}{\Gamma \vdash \text{fix } x(y : S) : T := M : S \rightarrow T} \quad (\text{T-FIX})$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{nil} : \forall X : \text{Type}, \text{list } X} \quad (\text{T-NIL})$$

$$\frac{}{\Gamma \vdash \text{cons} : \forall X : \text{Type}, X \rightarrow \text{list } X \rightarrow \text{list } X} \quad (\text{T-CONS})$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \text{list } S \quad \Gamma \vdash N_1 : T \quad \Gamma, x : S, y : \text{list } S \vdash N_2 : T}{\Gamma \vdash \text{match } M \text{ with nil} \Rightarrow N_1 \mid \text{cons } x \ y \Rightarrow N_2 : T} \quad (\text{T-MATCHL})$$

このように拡張された体系についても型保存性，合流性が成立する．強正規化性は再帰関数が項に現れない場合に限り成立する．

項  $M$  が標準形 (*canonical form*) である，とは， $M$  が  $0, S N, \text{true}, \text{false}, \text{fun } x : T \Rightarrow N, \text{fix } x(y : S) : T := N$ ，もしくは  $\text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow M$  のいずれかの形をしていることをいう．

定理 4 (前進性)  $\vdash M : T$  とする．任意の  $M$  の部分項  $M_0$  について，以下が成立する．

- $M_0$  が  $M_1 M_2$  の形 (ただし  $M_1$  は標準形) ならば， $M_1$  は  $\text{fun } x : T' \Rightarrow M'$  もしくは  $\text{fix } x(y : S') : T' := M'$  の形である．
- $M_0$  が  $\text{match } M_1 \text{ with } 0 \Rightarrow M_2 \mid S x \Rightarrow M_3 \text{ end}$  の形 (ただし  $M_1$  は標準形) ならば， $M_1$  は  $0$  または， $S M'$  の形である．
- $M_0$  が  $\text{match } M_1 \text{ with nil} \Rightarrow M_2 \mid \text{cons } x \ y \Rightarrow M_3 \text{ end}$  の形 (ただし  $M_1$  は標準形) ならば， $M_1$  は  $\text{nil}$  または， $\text{cons } M' M''$  の形である．
- $M_0$  が  $\text{if } M_1 \text{ then } M_2 \text{ else } M_3$  の形 (ただし  $M_1$  は標準形) ならば， $M_1$  は  $\text{true}$  もしくは  $\text{false}$  である．
- $M_0$  が  $M_1 S$  の形 (ただし  $M_1$  は標準形) ならば， $M_1$  は  $\text{fun } X : \text{Type} \Rightarrow M'$  の形である．